

## 動脈循環における最適性の解析

平山博史\* 安田寿一\* 小野功一\*\*

## 要 旨

動脈自体に内在する循環動態の最適性の実在とその条件を解析するため数学的分布定数回路モデルを用いて理論的研究を行なった。このような十分条件性を立証するためには、動物実験では不可能であるからである。

動脈循環を Navier-Stokes の流体力学的方程式と動脈壁の構造力学的運動方程式で記述し、線型周期解を仮定して上記方程式群を解いた。最適性の指標として最大血流量、複素型—正規化—インピーダンス、反射係数を用いた。血管壁弾性、血管内径、動脈終末端抵抗を種々に変化させるとある特定の組み合わせでこれらの指標が最大、最小になる極値が存在し、少なくとも1つの最適にする条件が存在することを立証した。

## はじめに

生体は常にその動的状態を一定に保たれるように種々の機構が相互に影響を及ぼし合いながら作動している。このような恒常性<sup>1)2)</sup>は、通常、生体にとって最適な状態の周辺をわずかに変動を伴いながら維持されている。しかし生体システムが現在その時点で最適な条件で駆動されているか否かを明らかにすることは極めて困難である。なぜなら“最適”という概念が未だにあいまいであり、定式化が難しいまた観察者の主観に負う部分が大きいためである。このことは最適性<sup>3)</sup>の評価指標は任意に設定することで多数出現してくる可能性を意味する。

本研究ではこのような状況を踏まえて、動脈自体の循環動態にのみ限ってその最適性を論ずることとする。その指標としては計算が比較的簡単で臨床的にも応用可能なかつ最も妥当性のある血流量、インピーダンス、反射係数を採用した。

数学的方法<sup>4)</sup>

弾性を有する血管内の血流動態を記述するには、2つの方程式群、すなわち血液の流れ自体を固有に表わす Navier-Stokes の流体力学的方程式と血液という粘性流体の移動によって生ずる血管壁の構造力学方程式である。これらはそれぞれ2組みの方程式群によって、次のように表記される。

## 流体力学的方程式系

$$\rho \frac{\alpha Vz}{\alpha t} = -\frac{\alpha P}{\alpha z} + \mu \left[ \frac{\alpha^2 Vz}{\alpha r^2} + \frac{1}{r} \frac{\alpha Vz}{\alpha r} + \frac{\alpha^2 Vz}{\alpha z^2} \right] \quad (1)$$

$$\rho \frac{\alpha Vr}{\alpha t} = -\frac{\alpha P}{\alpha r} + \mu \left[ \frac{\alpha^2 Vz}{\alpha r^2} + \frac{1}{r} \frac{\alpha Vz}{\alpha r} + \frac{\alpha^2 Vz}{\alpha z^2} - \frac{Vr}{r^2} \right] \quad (2)$$

## 血管壁の構造力学的方程式系

$$(\rho + Ma) \frac{\alpha^2 \xi}{\alpha t^2} + Cl \frac{\alpha \xi}{\alpha t} + Kl \xi =$$

$$\frac{h}{H} \frac{Et}{1 - \sigma \theta} \left[ \frac{\alpha \xi^2}{\alpha z^2} + \frac{\sigma \theta}{R} \frac{\alpha \eta}{\alpha z} \right] - \frac{\mu}{H} \left[ \frac{\alpha Vz}{\alpha r} + \frac{\alpha Vr}{\alpha z} \right]_{r=R} \quad (3)$$

$$(\rho + Ma) \frac{\alpha \eta^2}{\alpha t^2} + Cr \frac{\alpha \eta}{\alpha t} + Kr \eta =$$

$$-\frac{E \theta}{1 - \sigma \theta} \left[ \frac{\eta}{R^2} + \frac{\sigma \theta}{R} \frac{\alpha \xi}{\alpha z} \right] \frac{h}{H} + \left[ \frac{P}{H} - \frac{2\mu}{H} \frac{\alpha Vr}{\alpha r} \right]_{r=R} \quad (4)$$

さらに血管分岐を考えない1本の円柱状血管を考えると次の質量保存則が成立する。

$$\frac{\alpha Vr}{\alpha r} + \frac{Vr}{r} + \frac{\alpha Vz}{\alpha z} = 0 \quad (5)$$

変数の定義は次のとおり。Vz, Vr: 長軸, 半径

\*北海道大学医学部循環器内科

\*\*室蘭工業大学情報工学

方向血流速度.  $P$ : 入力血圧.  $\rho$ : 血液濃度.  $\mu$ : 粘度.  $\xi, \eta$ : 血管壁変位 (長軸, 半径方向).  $Kl, Cl, Kr, Cr$ : 周囲結合組織の長軸方向 ( $l$ ), 半径方向 ( $r$ ), 弾性, 粘性係数.  $Ma$ : 周囲組織質量.  $E\theta, Et$ : 血管壁弾性 (円周方向, 長軸方向).  $\sigma\theta, \sigma t$ : 血管壁ポアソン比 ( $E$  と同じ).  $h$ : 壁厚.  $H$ : 周囲組織の厚さ.

これら方程式群を線形周期解を仮定して解くことにより複素型伝送線方程式群に変換される. これを数学的モデル化すると図1となる.  $R(\omega), L(\omega), C(\omega)$  は周波数依存性を有する血流粘性抵抗, 慣性抵抗, 血管壁弾性である.

本研究ではこれらの種々のパラメータを変化させ血流量, インピーダンス, 反射係数を算出し最適条件を探索した.

成 績

1. 最大血流量の挙動

図2は動脈終末端抵抗  $Z_T$  を  $1500 \text{ dyn/cm}^2 \sim 22000 \text{ dyn/cm}^2$  まで変化させた場合の各  $Z_T$  に対する最大血流量 (瞬時値) を示してある. 図2cでは同血流量を動脈入口部から  $\chi=10 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, 50 \text{ cm}$  の各位置で算出させているが, いずれの位置においても同一の  $Z_T$  に対して最大血流量は極値を示した. 動脈血管内径は  $Ra=0.2 \text{ cm}$ ,

$0.25 \text{ cm}, 0.3 \text{ cm}$  の場合を解析した. 後二者の場合  $\chi=30 \text{ cm}$  の部位で血流量を計算した. 血管壁弾性は入力周波数依存性とし各第1調波成分のみが4~30まで段階的に変化するとした. いずれの大きさの血管内径 ( $Ra$ ), 壁弾性  $Ed$  においてもある  $Z_T$  に対して最大血流量は極値を示した. 最大血流量と  $Z_T$  とは, 全般的に放物線状を呈した. 同放物線状曲線は,  $Ra$  が小さいほど傾き (変化率) が緩徐であり, 極値の絶対値も小さくなる. また変動する範囲も拡大している.

$Ed$  の第1調波成分が増大すると同一の  $Z_T$  に対して最大血流量は低下した. この現象はとくに  $Ed(f=1)=4 \times 10^6 \text{ dyn/cm sec}^2 \sim 8 \times 10^6 \text{ dyn/cm sec}^2$  で著しかったが  $Ed(f=1)$  が増加するにつれて最大血流量の差は減少した. さらに  $Ed(f=1)$  が増大すると同時に, 最大血流量の極値を与える  $Z_T$  も右方変位し増大した. 一方, 曲線群自体は全体として平行な変化を示し交叉することは認められなかった.

2. インピーダンス  $Z/Z_{DC}$  の挙動 (図3)

本研究では局所複素数型抵抗 (インピーダンス) によって血流抵抗 (血流・血圧比) を表わした. 計算部位は動脈入口部から  $\chi=30 \text{ cm}$  の部位として統一した. 血管内径  $Ra$ , 動脈壁弾性係数  $Ed$  は, 最大血流量解析の場合と同様の値を用いた.

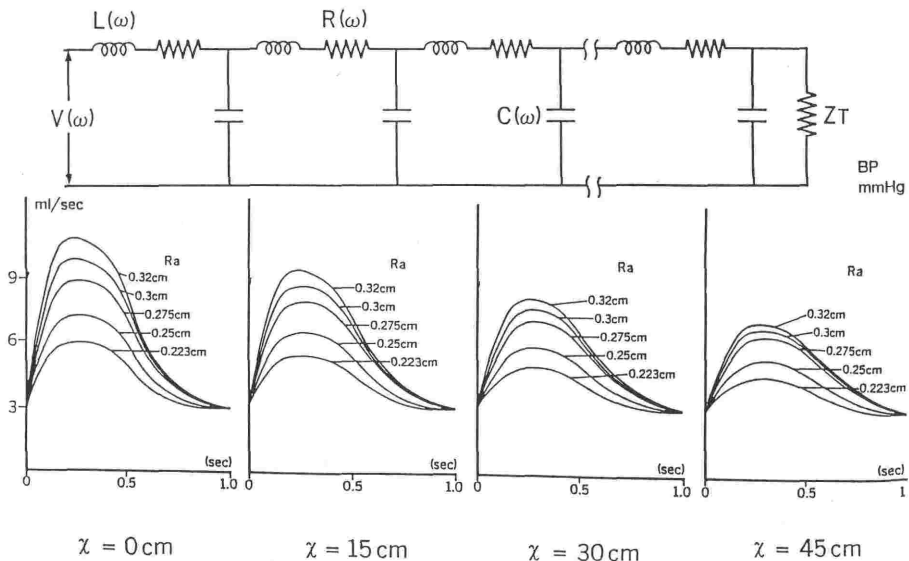


図1 本研究で用いた理論的電気的等価回路モデル.  $L(\omega), R(\omega), C(\omega), \omega=2\pi f$  は流体力学的慣性抵抗, 粘性抵抗, 血管壁コンプライアンスを示す.  $Z_T$  を終末端抵抗, 下段は入口部からの距離による血流波形の変化を示す.  $Ra$  は血管内径, 横軸は時間 sec, 縦軸は血流量 ml/sec.

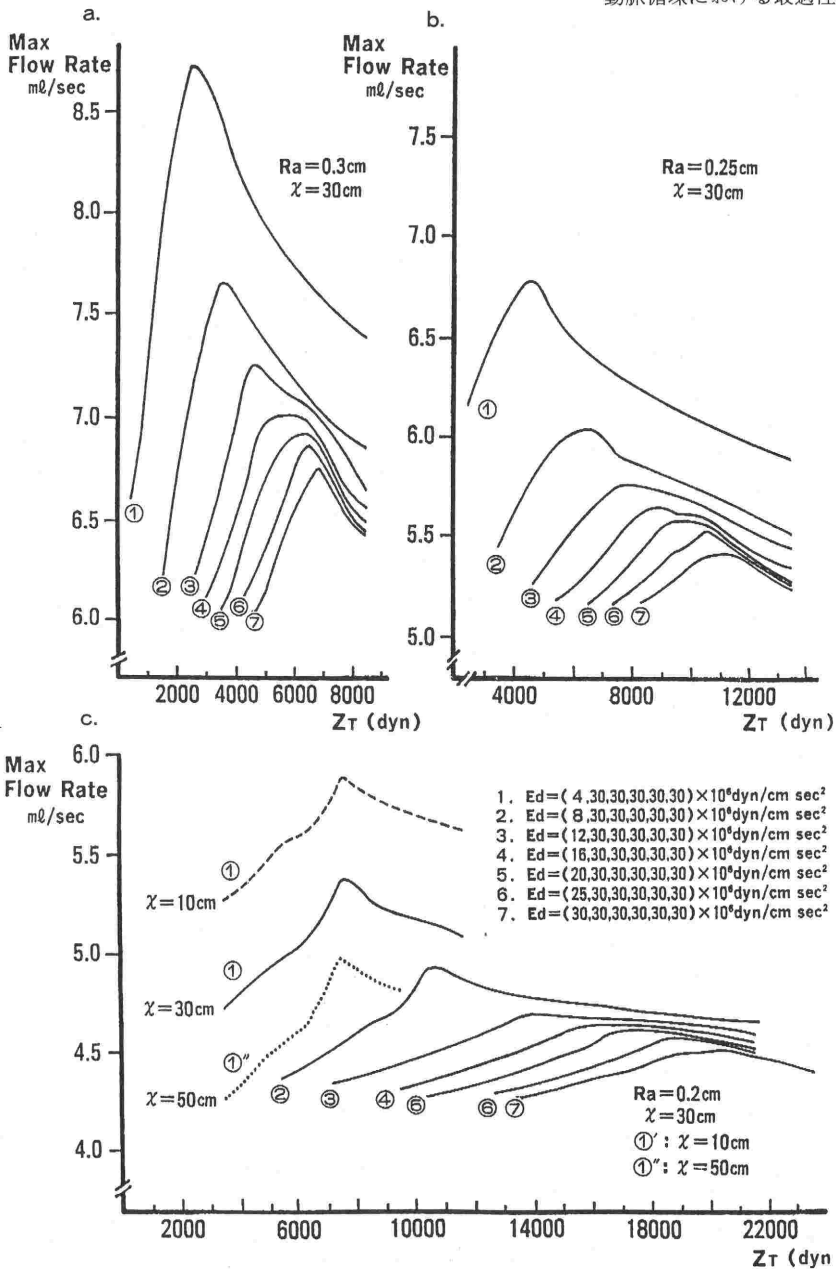


図2 縦軸 最大血流量 ml/sec—横軸 Z<sub>T</sub>  
 入口部から 30 cm の部位における最大血流量を示す。Ed は血管壁動的弾性係数を第 1 調波成分から第 6 調波成分までマトリックスで表わしたものである。本研究では第 1 調波成分のみを段階的に変化させた。

Z(f=1)/Z<sub>DC</sub>-Z<sub>T</sub> の関係は、いずれの条件においても逆放物線状を呈しており、少なくとも 1 つの極値を有することが示された。Ra が增大すると各曲線の傾斜 (変化率) が増大した。しかし同一の Z<sub>T</sub> に対して Z(f=1)/Z<sub>DC</sub> とその極値は減少した。さらに極値を与える Z<sub>T</sub> は、Ra が大きい程、左方へ変位しておりより小さい Z<sub>T</sub> において

Z(f=1)/Z<sub>DC</sub> は極小となっている。Ed(f=1) を増大させると各 Z<sub>T</sub> に対して Z(f=1)/Z<sub>DC</sub> は増大する。このことはとくに Ra が小さい場合に、顕著であるが Ra が增大すると (Ra=0.3 cm) Z(f=1)/Z<sub>DC</sub> の増大率は減少する。しかし Ed を段階的に変動させて得られるこれら曲線群は最大血流量-Z<sub>T</sub> の関係と同様、全体としてパラレルな

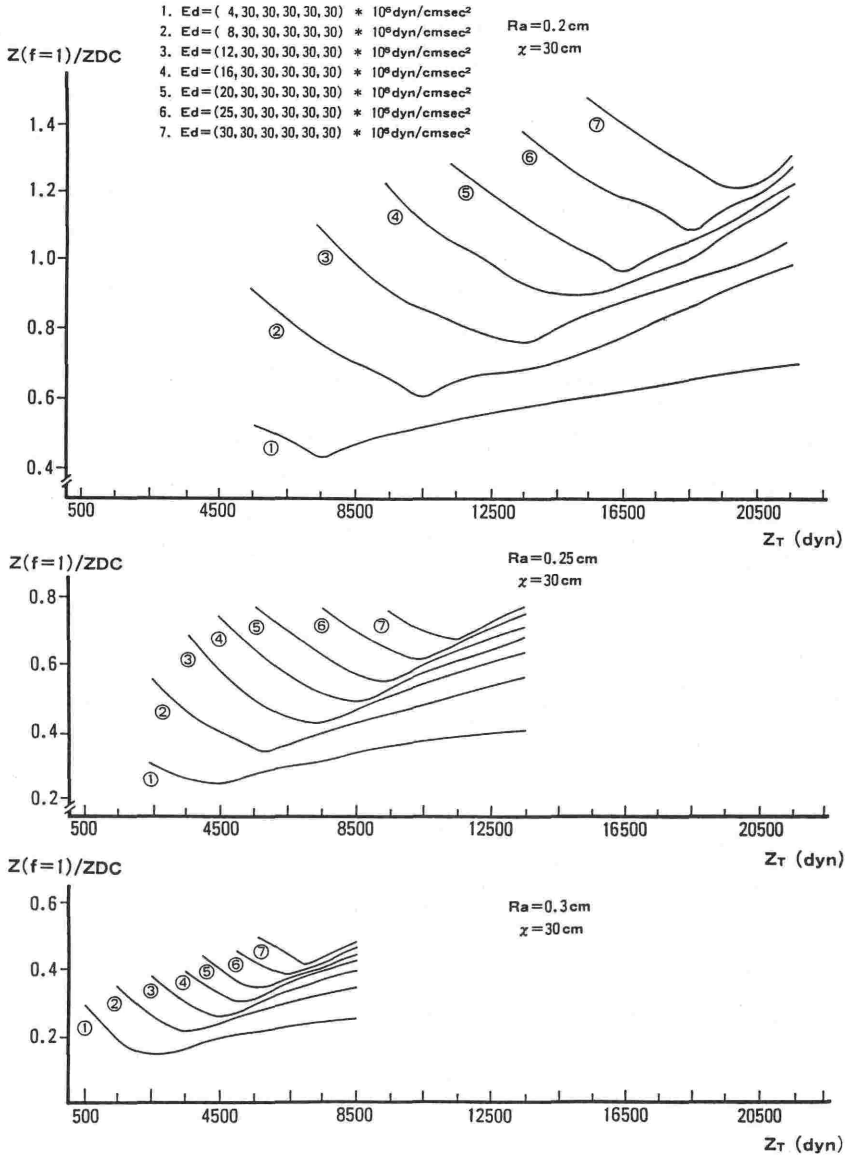


図3 正規化複素型抵抗  $Z/Z_{DC}$  と  $Z_T$   
 入口部から  $\chi = 30 \text{ cm}$  の位置

変動を示し、交叉することはなかった。また、動脈入口部からの位置 ( $\chi = 10 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, 50 \text{ cm}$ ) が変化しても、得られた結果は、基本的には同一であり、いずれの位置においても同一の  $Z_T$  に対して  $Z(f=1)/Z_{DC}$  は、極値を呈した。もちろん、各  $Z(f=1)/Z_{DC}$  の絶対値は、入口部から遠位側の方がより大きな値を示した。 ( $Z(\chi = 50 \text{ cm}) > Z(\chi = 30 \text{ cm}) > Z(\chi = 10 \text{ cm})$ ) また曲線群は各  $\chi$  間で平行な変動であった。

3. 反射係数 Ref. Coef. (f=1) (図4)

動脈血流循環では、血圧反射、血流反射の両者が存在するが、数学処置上、それらは単に符合の相違であるから本研究では統一して絶対値のみを解析した。また第1調波成分から第6調波成分まで存在するが、本研究では基本調波のみを示す。

Ref. Coef.  $-Z_T$  は各種条件が変動しても、基本的には逆放物線を呈していた。しかし、最大血流量  $-Z_T$ ,  $Z(f=1)/Z_{DC} - Z_T$  らの場合とは異なり各曲線ごとで交叉する複雑なパターンを呈した。  $Ra$  が小さい場合 ( $Ra = 0.2 \text{ cm}$ ) 曲線の変化率は緩

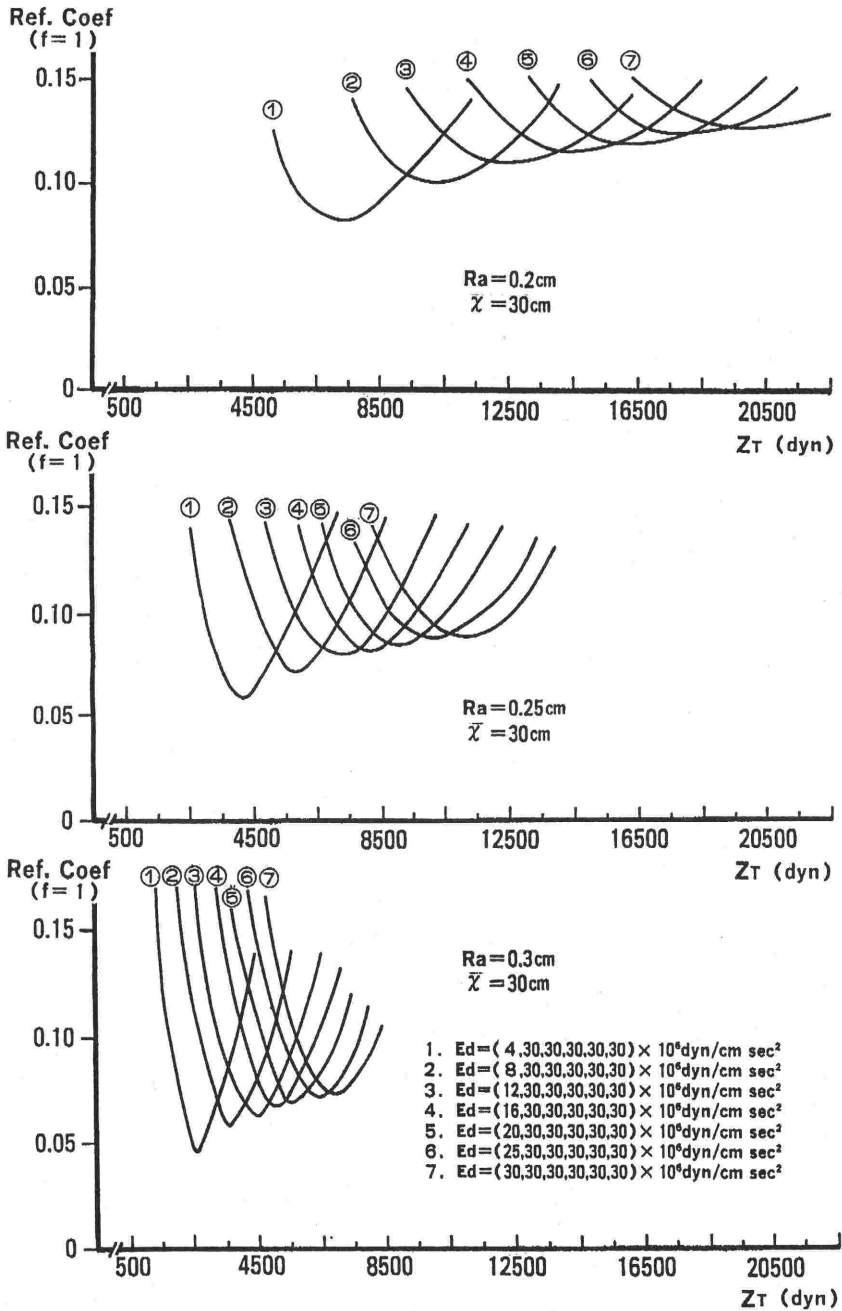


図4 反射係数 Ref. Coef. と  $Z_T$  の関係を示す。

徐であり変動域も広く Ref. Coef. の絶対値も大きな値を示す。また各  $Z_T$  に対する Ref. Coef. の極値も大きな値を示した。さらに同一の  $Ed$  に対して Ref. Coef. の極値を与える  $Z_T$  が増大しており曲線群が全体として右方へ偏位している。

$Ed(f=1)$  の変化に伴いこれが増加すると、各曲線は右方へ偏位する。この傾向は  $Ra$  が小さい

ほど顕著である。また Ref. Coef. の絶対値も増加する。 $Z(f=1)/Z_{DC}-Z_T$  の関係と大きく異なるのは  $Ed$  の増大に伴い曲線の変化率 ( $Z_T$  を主変数とみなした場合) が低下し全体としてなだらかになる。このため  $Ed$  の変動により得られた曲線群は互いに種々の  $Z_T$  において交叉しあう。このような変化は  $Ra$  が大きい場合においてむしろ

明らかである。

これらの関係は動脈入口部からのいずれの位置 ( $\chi=10$  cm, 30 cm, 50 cm) においても認められるが、同一の  $Z_T$  に対しては Ref. Coef. ( $\chi=10$  cm)  $>$  Ref. Coef. ( $\chi=30$  cm)  $>$  Ref. Coef. ( $\chi=50$  cm) であった。

## 考 案

本研究では数学的分布定数回路モデルを用いることにより理論的に拍動性動脈血流における最大血流量、インピーダンス、反射係数を算出し最適な動脈循環を生じしめる条件が存在するか否かを解析した。

### 1. 数学的理論に関して

循環動態の制御的側面を解析する場合、動物実験と理論的研究の2つの手段がある。本研究では変数の選択的独立効果の循環動態に対する影響をより正確に分析するため血管系の分布定数回路モデル<sup>4)</sup>による理論的研究方法を用いた。循環系を集中定数回路<sup>5)</sup>で表現し、血行動態の最適性<sup>6)</sup>を論ずる手法もあるがそれは、同時に心室収縮態との相互関係をも内含する一方、入力インピーダンスや反射係数の算出には不適切であるため動脈自体の循環動態を解析する目的では分布定数回路が望ましい。

生体は総じて非線型であるが生理的変動範囲においてはむしろ線型理論を用いた方がその近似性が向上する。大腿動脈など中等大の動脈では脈波伝播速度が 800-1500 cm/sec<sup>7)</sup>と高値を示すため一般に Navier-Stokes 式中の非線型項を無視することが可能である。

上行大動脈を除く動脈系は周囲結合組織により強固に拘束されている。このような状況では血管各方向の変位・ひずみは比較的小さく、線型弾性体理論の方がむしろ有限変形理論よりも適切である。本研究では以上の理論に基づいて線型化 Navier-Stokes 方程式と血管壁の線型構造力学方程式を解いた。

### 2. 血流の挙動に関して

生物における拍動血流量を正確に計測することは現在では不可能である。本研究では、ヒトで得られた入力血圧にもとづいて理論的に血流量を瞬時値で算出した。その再現波形はヒトで計測されたパターンとほぼ一致した。

最大血流量は動脈入口部から任意の位置に置いて Ra, Ed,  $Z_T$  のある特定の組み合わせの条件のもとでは極値を示した。このことは、即ち、最適条件が与えられれば、動脈循環は動脈管の全域で最大の血流量を得る可能性を示している。

$Z_T$  (終端抵抗) は考えている血管よりもさらに末梢側の血管の全血管直列抵抗を示す。すなわち  $Z_T$  の増大は末梢細動脈-毛細管の収縮を意味する。曲線群の挙動が示すとうり  $Z_T$  が増大すると最大血流量は減少するが逆に  $Z_T$  が減少するとある  $Z_T$  が極値を示した。この極値は Ra が大きい程, Ed ( $f=1$ ) が小さい程,  $Z_T$  の小さい値によって規定される。すなわち大動脈の様な太くて軟らかい血管がより効率よく血液を転送するにはそこに接続する末梢血管も、抵抗の低い特性を有するものが適切であることを意味している。逆に内径が小さい血管の場合,  $Z_T$  が大きい場合に極値を示している。これらのことはインピーダンス整合<sup>8)</sup>として解釈される。

### 3. インピーダンスの挙動

血流の動的特性を表現する数学的手法としてのインピーダンスは各種 (インプットインピーダンス, 特性インピーダンス, 横断インピーダンス)<sup>9)</sup> がある。しかし動脈入口部からの距離に依存して変化する血流動態を解析する目的には局所インピーダンス  $Z(f=1)/Z_{DC}$  が、最も適している。比較を容易にするため全血管直列抵抗  $Z_{DC}$  で正規化した  $Z(f=1)/Z_{DC}$  と  $Z_T$  の関係を示す曲線群は最大血流量- $Z_T$  の関係を示す曲線と表裏であった。すなわち Ra が小さい場合  $Z/Z_{DC}$  の極値は  $Z_T$  が大きいとき、又 Ra が大きい状況ではより小さい  $Z_T$  により  $Z/Z_{DC}$  の極値がもたらされ、インピーダンス整合の内在を示している。同関係を修飾する要素として Ed が重要であった。Edが増加し血管壁が硬化した場合を想定すると、 $Z/Z_{DC}$  の極値は増加し抵抗が増大したことを意味している。また極値を与える  $Z_T$  も増大している。このことは血管壁が硬化した場合、血流整合は末梢側の抵抗の増大によって維持されていると解釈することができる。

### 4. 反射係数の挙動

Ref. Coef. も  $Z/Z_{DC}$  同様、周波数依存特性を示すが、本研究では、基本調波成分に関してのみ解析を行なった。

Ref. Coef.- $Z_T$  との関係は逆放物線状であり、基本的には  $Z/Z_{DC}-Z_T$  関係と一致する。また各曲線群における極値を与える  $Z_T$  も、 $Z/Z_{DC}-Z_T$  の場合と一致している。しかし壁弾性  $E_d$  が変化すると曲線群は平行な動きを示さずその変化率を異にしながら偏位するため  $Z_T$  のある値に対して異なる数種の血管壁弾性曲線が、同一の反射係数を示す場合が出現した。このことはとくに  $R_a$  が小さく、 $E_d(f=1)$ 、 $Z_T$  が大きい場合に顕著であった。

曲線群の傾き(変化率)は  $R_a$  が大きいほど明らかであり  $Z_T$  のわずかな変化でも大きく Ref. Coef. は変化していた。すなわち動脈循環動態の指標としての瞬時最大血流量、インピーダンス、反射係数は血管内径、壁弾性動脈終末端抵抗の特定の組み合わせによって極大、又は極少値を示し最適条件が少なくとも1つは存在することが推論された。又その指標としては、3者の示す実測性、否重複性を考えるとインピーダンスが望ましいと考えられた。

## 結 語

1. 動脈循環の最適性を解析する目的で数学的分布定数回路モデルを用いた最大血流量、インピーダンス、反射係数を算出した。
2. 3つの指標はいずれも放物線、逆放物線状を呈し、血管内径、血管壁弾性、動脈終末端抵抗の

3変数のある特定の組み合わせにおいて少なくとも1つの極値を有することが示された。すなわち最適条件が存在した。

3. 極値の挙動と3つの変数の挙動とはインピーダンス整合を表現していた。
4. 最適状態の指標として実利的には、インピーダンスが有効と考えられる。

## 参 考 文 献

- 1) 養島 高：数理生理学。学術図書出版、1980年、東京、259-309。
- 2) 小野功一：生体と情報。学術図書出版、124-174、1989、東京。
- 3) Sunagawa, K., Maughan, W., Sagawa, K.: Optimal arterial resistance for the maximum stroke work in canine ventricle. *Cir. Res*, 56, 586. 1985.
- 4) 平山博史, 安田寿一：血管の分布定数回路モデル1. *血管* 10(3): 183-190, 1987.
- 5) 平山博史, 安田寿一：循環器系の集中定数回路モデル. *循環器科* 24(4): 371-378, 1988.
- 6) Hamalainen, R. P.: On the minimum work criterion in optimal control model of LV ejection. *IEEE. BME*. 23, 11, 952-956. 1985.
- 7) LIE, C., Melbin, J., Riffle, R. A., Noordergraaf, A.: Pulse wave transmission. *Cir. Res*, 49, 442-452. 1981.
- 8) 榊米一郎, その他：電気回路(2)。オーム社、47-51、東京、1984。
- 9) Westerhoff, N., Noordergraaf, A.: Arterial viscoelasticity. A generalized model. *J. Biomechanics*. 3. 357-379. 1970.

## Analysis of the optimal arterial circulation

Hirayama, H\*, Yasuda, H\*. and Ono., K\*\*.

\*Department of cardiovascular medicine, Hokkaido univ.

\*\*Institute of technology, Muroran

An analysis was focused on the discovery of the optimal conditions to minimize the arterial impedance, reflection coefficient and maximize the flow rate. Practically it is impossible to verify such optimal state by the experiments, a mathematical distributed mode (theoretical) was used to analysis. A linearized Navier Stokes equation and the wall dynamical equation were solved by assuming the linear cyclic solutions. The parameters involved in the present study were all physiologically data. By a given

specific combination of the conditions between the arterial wall elasticity, internal radius of the artery and the terminal resistance of the arterial tube, there was at least one extreme for the impedance, reflection coefficient and maximum flow rate.

Consequently we conclude there was an optimal condition in the arterial system to make the blood flow suitable for each independent state of the arterial circulation.

**Key words:** optimality. arterial circulation. distributed parameter model.  
impedance. reflection coefficient.